

ΑΣΕΠ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ 2009

ΚΛΑΔΟΣ: ΠΕ 03 Μαθηματικών

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

Ερώτημα 1^ο

Εισαγωγή

1. Το συγκεκριμένο ερώτημα θα μπορούσε να έχει ισοδύναμα τη μορφή: «Να προτείνετε σχέδιο μαθήματος, διάρκειας μίας (1) διδακτικής ώρας, για τη μέτρηση του μήκους του κύκλου καθώς και για τη μέτρηση του εμβαδού του κυκλικού δίσκου». Με το δεδομένο λοιπόν ότι η απάντηση στο ερώτημα αποτελεί ανάπτυξη σχεδίου μαθήματος, ο διαγωνιζόμενος επιλέγει να κινηθεί, σύμφωνα με το γνωστό σε αυτόν τρόπο ανάπτυξης ενός σχεδίου μαθήματος στο Μαθηματικά.
2. Χωρίς να εγείρονται ζητήματα κατανόησης, επισημαίνεται η απόκλιση της χρησιμοποιούμενης ορολογίας από ό,τι έχει καθιερωθεί εδώ και 25 χρόνια. Έτσι λοιπόν, δεν μιλάμε για «μήκος περιφέρειας», αλλά για «μήκος κύκλου» και το σημαντικότερο, όχι για «εμβαδόν κύκλου» αλλά για «εμβαδόν κυκλικού δίσκου».
3. Δεδομένου ότι το τεθέν ερώτημα αντιμετωπίζεται τόσο στο Γυμνάσιο (Β΄ Γυμνασίου) όσο και στο Λύκειο (Β΄ Λυκείου) με την ίδια αλληλουχία, δηλαδή προηγούνται τα κανονικά πολύγωνα και ακολουθεί η μέτρηση του κύκλου, έχει μεγάλη σημασία να διευκρινισθεί σε ποιο επίπεδο θα γίνει η ανάπτυξη, διότι εξυπηρετούνται διαφορετικοί στόχοι. Στο επίπεδο λοιπόν του Γυμνασίου, όπως προκύπτει από το χρησιμοποιούμενο σχολικό εγχειρίδιο, η ενότητα «κανονικά πολύγωνα» δεν έχει σύνδεση με την ενότητα «μέτρηση κύκλου». Αντιθέτως, σε επίπεδο Β΄ Λυκείου, η μέτρηση κύκλου επιτυγχάνεται μέσω των κανονικών πολυγώνων (...το κοινό όριο του εγγεγραμμένου σε κύκλο πολυγώνου με πλήθος πλευρών που διαρκώς αυξάνεται για να προσεγγίσει τον κύκλο αφ'ενός και του περιγεγραμμένου περί τον ίδιο κύκλο πολυγώνου με ισάριθμο πλήθος πλευρών με αυτό του εγγεγραμμένου πολυγώνου). Σε επίπεδο Γυμνασίου ο κύριος στόχος είναι η ανακάλυψη από τους μαθητές των τύπων $L = 2\pi R$, $E = \pi R^2$ για πρακτική περαιτέρω χρήση, στόχος που επιτυγχάνεται σχετικώς εύκολα. Αντίθετα σε επίπεδο Λυκείου η ακολουθούμενη μεθοδολογία

αποσκοπεί στο να αναδείξει το πώς προκύπτει ο αριθμός π , οπότε οι παραπάνω τύποι καθίστανται δευτερεύων στοιχείο της όλης προσπάθειας, δεδομένου ότι είναι ήδη γνωστοί στους μαθητές. Κατά βάση, στο επίπεδο Λυκείου και για το συγκεκριμένο θέμα, ο μαθητής έρχεται σε επαφή με τις επ' άπειρον διαδικασίες. Παίρνει λοιπόν σημαντικότερα ερεθίσματα για να οικοδομήσει σιγά-σιγά στη σκέψη του την έννοια του απείρου – την έννοια του ορίου, έννοιες ως γνωστόν, κεντρικές στην ανάπτυξη των Μαθηματικών.

4. Στο παρόν σημείωμα, τα σχόλιά μας αφορούν τη θεώρηση του συγκεκριμένου ζητήματος σε επίπεδο Λυκείου. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις και τη διαπίστωση του ερωτήματος «αφού έχετε διδάξει τα κανονικά πολύγωνα και την εγγραφή τους σε κύκλο», πιθανολογούμε ότι οι θεματοδότες έθεσαν το συγκεκριμένο για να εξεταστεί σε επίπεδο Λυκείου.

Ανάπτυξη

Αντικείμενα διδασκαλίας που έχουν ως συστατικά στοιχεία μεταβολές ή προσεγγίσεις μεγεθών προσφέρονται για να αξιοποιήσουμε τις νέες τεχνολογίες στη διδακτική τους αντιμετώπιση. Έτσι λοιπόν, η χρήση του υπολογιστή με κατάλληλο λογισμικό –και στο συγκεκριμένο θέμα υπάρχει πλούσιο υλικό– είναι δυνατόν να κάνει το μάθημα απολύτως συναρπαστικό.

Παράλληλα, θα δοθούν σχετικές διευθύνσεις όπως www.hms.gr (Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία), www.sch.gr για να αναζητήσει ο μαθητής σε αυτές διάφορες προσεγγίσεις για το συγκεκριμένο θέμα.

Δίνονται λέξεις-κλειδιά στους μαθητές, όπως «μέτρηση κύκλου», «προσέγγιση», «μήκος κύκλου», «εμβαδόν κύκλου», «κανονικά πολύγωνα». Εισάγοντας τες στις μηχανές αναζήτησης του διαδικτύου, ένας πλούσιος κόσμος για το θέμα που τους απασχολεί θα παρουσιαστεί στην οθόνη του υπολογιστή τους.

Ήδη έχει αναφερθεί (παρ. 3) ποιος είναι ο κύριος στόχος διδασκαλίας της ενότητας αυτής.

Ειδικότεροι στόχοι της διδασκαλίας του συγκεκριμένου αντικειμένου είναι:

1. Να γνωρίζει ο μαθητής ότι σε κάθε κύκλο, ο λόγος του μήκους του προς το μήκος της διαμέτρου του είναι σταθερός $\frac{L}{2R} = \pi$ (ο σταθερός αυτός λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π).
2. Να πληροφορηθεί ότι η ακολουθούμενη διαδικασία των προσεγγίσεων μέσω εγγεγραμμένων σε κύκλο κανονικών πολυγώνων και περιγεγραμμένων περί τον ίδιο

κύκλο πολυγώνων, αποτελεί μια πανάρχαια μέθοδο απολύτως έγκυρη, που εφαρμόστηκε από τον έλληνα μαθηματικό της αρχαιότητας Αρχιμήδη.

3. Να αρθούν πιθανές επιφυλάξεις που προϋπάρχουν στη σκέψη του μαθητή ότι η προσέγγιση δεν αποτελεί αυστηρή μαθηματική διαδικασία, άρα «μη νόμιμη». Η έννοια της προσέγγισης στο στάδιο αυτό αποκτά απολύτως μαθηματικό περιεχόμενο και ως μέθοδος αντιμετώπισης σχετικών προβλημάτων, «παράγει» ορθά και ακριβή αποτελέσματα.
4. Να ανακαλύψει ο μαθητής μέσω της ακολουθούμενης πορείας τους απολύτως βασικούς τύπους της Γεωμετρίας, $L = 2\pi R$, $E = \pi R^2$ και να τους χρησιμοποιεί σε πρώτη ζήτηση.
5. Να κάνει ακριβή χρήση της σχετικής ορολογίας (Έτσι λοιπόν μιλάμε για «μήκος κύκλου» και «εμβαδόν κυκλικού δίσκου»).

Διδακτική προσέγγιση

Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις της διδασκαλίας, κέντρο αυτής αποτελεί ο μαθητής (μαθητοκεντρικό μοντέλο), ο δε διδάσκων έχει ρόλο συντονιστή, εμπνευστή στις προσπάθειες του μαθητή για την ανακάλυψη-κατασκευή από μέρους της νέας γνώσης και αρωγού ώστε να απεμπλέκει το μαθητή στις πιθανές δυσκολίες.

Ο διδάσκων, στο πλαίσιο της οργάνωσης του μαθήματος, θα χρησιμοποιήσει φύλλα εργασίας με κατάλληλες, για την εξυπηρέτηση των στόχων που έχει θέσει, δραστηριότητες.

Το θέμα που μας απασχολεί (μέτρηση κύκλου – μέτρηση εμβαδού κύκλου) εδράζεται σε ένα «λεπτό» θεωρητικό-επιστημονικό υπόβαθρο, το οποίο βεβαίως ο διδάσκων γνωρίζει.

Αυτή η επιστημονική γνώση, πρέπει να μετασχηματισθεί κατάλληλα με τη μορφή των δραστηριοτήτων ώστε να καταστεί διδάξιμη.

Η κατασκευή, από μέρους του μαθητή, της νέας γνώσης θα είναι το αποτέλεσμα της επεξεργασίας των δραστηριοτήτων, οι οποίες προτείνεται να γίνουν με ομάδες 3 ή 4 μαθητών. Η εργασία των μαθητών θα παρουσιαστεί στον πίνακα, θα γίνει αντικείμενο συζήτησης στην τάξη και ο διδάσκων θα την χρησιμοποιήσει για να παρουσιάσει την «επίσημη» μορφή της νέας γνώσης.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Για να βοηθηθεί η σκέψη του μαθητή και να αντιδρά με σχετική ευκολία στα σχετικά προβλήματα είναι αναγκαία η εξοικείωσή του με τους παρακάτω συμβολισμούς:

- λ_n : το μήκος της πλευράς εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) κανονικού n-γώνου

- α_n : το απόστημα εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου, δηλαδή η απόσταση του κέντρου από οποιαδήποτε πλευρά του
- P_n : η περίμετρος εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου
- E_n : το εμβαδόν εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου
- λ_n : το μήκος της πλευράς περιγεγραμμένου περί τον κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου
- P_n' : η περίμετρος της πλευράς περιγεγραμμένου περί τον κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου
- E_n' : το εμβαδόν της πλευράς περιγεγραμμένου περί τον κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου
- Οι τύποι: $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$, $R_n = n\lambda_n$, $E_n = \frac{1}{2} P_n \alpha_n$
- Αν έχουμε δύο όμοια κανονικά πολύγωνα Π_1, Π_2 , τότε ως γνωστόν αυτά είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο. Έστω (O_1, R_1) ο κύκλος που εγγράφεται το Π_1 και (O_2, R_2) το Π_2 . Αν P_1 η περίμετρος του Π_1 και P_2 η περίμετρος του Π_2 τότε ισχύει $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

Σύντομη περιγραφή του μαθηματικού περιεχομένου

- Η μέτρηση του μήκους του κύκλου βασίζεται στην παρακάτω ιδέα: Έστω ο κύκλος (O, R) . Εγγράφουμε σ' αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό εξάγωνο, ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Καθώς ο αριθμός των πλευρών διπλασιάζεται, διαπιστώνουμε διαισθητικά (φαίνεται από το σχήμα) ότι το «κανονικό πολύγωνο» τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν αντί εγγεγραμμένων θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα γύρω από τον κύκλο (O, R) και διπλασιάζουμε διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την ακολουθία (P_n) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O, R) και την ακολουθία (P_n') των περιμέτρων κανονικών πολυγώνων γύρω από τον ίδιο κύκλο (O, R) τότε προφανώς θα ισχύει $P_n < L < P_n'$ (1) (L το μήκος του κύκλου)
- Αποδεικνύεται ότι οι ακολουθίες (P_n) και (P_n') έχουν κοινό όριο. Το κοινό τους όριο – που είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των κανονικών πολυγώνων (θα μπορούσαμε να πάρουμε τετράγωνο, οκτάγωνο κ.ο.κ.)- λέγεται μήκος του κύκλου (O, R) .

- Η (1) αν διαιρεθεί με $2R$ (διάμετρος) δίνει $\frac{1}{2R} P_v < \frac{L}{2R} < \frac{1}{2R} P'_v$ (2). Αφού οι ακολουθίες (P_v) και (P'_v) έχουν κοινό όριο το L τότε και οι $\left(\frac{1}{2R} P_v\right)$ και $\left(\frac{1}{2R} P'_v\right)$ έχουν κοινό όριο το $\frac{L}{2R}$.

- Εξάλλου, έχουμε το θεώρημα του Ιπποκράτη του Χίου που αναφέρει ότι «ο λόγος των μηκών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των αντιστοίχων ακτίνων τους». Δηλαδή: Αν (O_1, R_1) και (O_2, R_2) δύο κύκλοι των οποίων τα μήκη είναι L_1, L_2 αντιστοίχως τότε $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$ ή $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$. Διότι: Αν Π_1 κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στο (O_1, R_1) με

διαρκώς διπλασιαζόμενο αριθμό πλευρών και Π_2 κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στον (O_2, R_2) όμοιο προς το Π_1 και P_1, P_2 αντιστοίχως οι περιμέτροι ισχύει ως γνωστόν:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}. \text{ Όταν } n \rightarrow +\infty \text{ τότε } P_1 \rightarrow L_1, P_2 \rightarrow L_2. \text{ Προφανώς } \frac{P_1}{P_2} \rightarrow \frac{L_1}{L_2}.$$

$$\text{Αλλά } \frac{R_1}{R_2} = \frac{P_1}{P_2} \text{ οπότε } \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{ ή } \frac{L_1}{L_2} = \frac{2R_1}{2R_2} \text{ ή } \frac{L_1}{2R_1} = \frac{L_2}{2R_2}.$$

Αποδείχτηκε ότι $\frac{L}{2R}$ σταθερό. Τον σταθερό λόγο τον συμβολίζουμε με π (από το

$$\text{περιφέρεια) } \frac{L}{2R} = \pi \text{ οπότε } L = 2\pi R.$$

- Για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου έχουμε:
Έστω $A_1 A_2 \dots A_n$ ένα εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) κανονικό πολύγωνο με περίμετρο P_n

$$\begin{aligned} E_n &= (A_1 A_2 \dots A_n) = (OA_1 A_2) + (OA_2 A_3) + \dots + (OA_n A_1) < \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot R + \frac{1}{2} A_2 A_3 \cdot R + \dots + \frac{1}{2} A_n A_1 \cdot R = \\ &= \frac{1}{2} P_n R < \frac{1}{2} L R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \text{ Άρα } E_n < \pi R^2 \end{aligned}$$

Έστω τώρα $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ το περιγεγραμμένο γύρω από τον κύκλο (O, R) κανονικό πολύγωνο με περίμετρο P'_n

$$\text{Προφανώς } E'_n = (A'_1 A'_2 \dots A'_n) = \frac{1}{2} P'_n R > \frac{1}{2} L \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2 \quad E_n < \pi R^2 < E'_n$$

Του $n \rightarrow \infty$ τότε $(E_n), (E'_n)$ αποδεικνύεται ότι έχουν κοινό όριο το πR^2 . Το κοινό αυτό όριο λέγεται εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R) δηλαδή $E = \pi R^2$

Διεξαγωγή του μαθήματος

Η παρακάτω δραστηριότητα, που θα δοθεί στο φύλλο εργασίας, έχει ως σκοπό να συνειδητοποιήσει ο μαθητής την προτεινόμενη μέθοδο υπολογισμού του μήκους κύκλου.

Δραστηριότητα 1

Πάρτε ένα κύκλο (O,R) και:

α) εγγράψτε ένα κανονικό εξάγωνο

β) περιγράψτε γύρω από αυτόν τον κύκλο ένα επίσης κανονικό εξάγωνο

Αν P_6, P_6' η περίμετρος αντιστοίχως του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου εξαγώνου και L το μήκος του κύκλου

i) να υπολογίσετε συναρτήσει του R τα λ_6, λ_6'

ii) αποδείξτε ότι $\frac{1}{2R} P_6 < \frac{L}{2R} < \frac{1}{2R} P_6'$

iii) Βρείτε μεταξύ ποιων τιμών παίρνει τιμές ο λόγος $\frac{L}{2R}$ αξιοποιώντας την παραπάνω σχέση.

Δραστηριότητα 2

Πάρτε έναν κύκλο (O,R) και:

α) εγγράψτε ένα κανονικό εξάγωνο

β) περιγράψτε γύρω απ' αυτόν τον κύκλο ένα επίσης κανονικό εξάγωνο

i) αξιοποιώντας τα P_6, P_6' της προηγούμενης δραστηριότητας υπολογίστε το εμβαδόν E_6 εγγεγραμμένου και το εμβαδόν E_6' του περιγεγραμμένου εξαγώνου

ii) αν E το εμβαδόν του κύκλου βρείτε μεταξύ ποιων τιμών παίρνει τιμές το $\frac{E}{E_6}$ αξιοποιώντας το προφανές ότι $E_6 < E < E_6'$

Ο στόχος της δραστηριότητας 2 είναι ανάλογος με αυτόν της δραστηριότητας 1, αλλά για το εμβαδόν.

Η επεξεργασία (λύση) των δραστηριοτήτων αυτών αναμένουμε να φέρει τους μαθητές σε κατάσταση μάθησης. Έτσι λοιπόν η «επισημοποίηση» της γνώσης από τον διδάσκοντα θα παγιωθεί στη συνείδηση των μαθητών δεδομένου ότι προηγήθηκε ο προσωπικός προβληματισμός τους.

Οι τύποι $L = 2\pi R$ και $E = \pi R^2$ θα αναγραφούν στον πίνακα επισφραγίζοντας το συγκεκριμένο μάθημα. Η διδασκαλία ολοκληρώνεται αναθέτοντας δουλειά για το σπίτι. Για το σκοπό αυτό θα επιλεγούν ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο της οικείας ενότητας.

- Τονίζουμε ιδιαίτερα την προαναφερθείσα ακριβή ορολογία «μήκος κύκλου» «εμβαδόν κυκλικού δίσκου».
- Επισημαίνουμε στους μαθητές ότι η μέθοδος που είχαν μάθει στο Γυμνάσιο για να υπολογίσουν το π είναι ανεπαρκής αν επιθυμούμε τιμές του π μεγαλύτερης ακριβείας (περισσότερα δεκαδικά ψηφία).
- Σε πιθανό ερώτημα γιατί μας χρειάζεται μεγαλύτερη ακρίβεια από το 3,14 μπορούμε να αναφέρουμε ότι αστρονομικές μετρήσεις απαιτούν μεγαλύτερη ακρίβεια στη τιμή του π .

Ερώτημα 2ο

Υποερώτημα (α)

Ο ισχυρισμός από τον μαθητή Α ότι «επειδή το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ άρα δεν υπάρχει το όριο αυτό» είναι ανυπόστατος διότι:

1. Η απροσδιόριστη μορφή δεν συνδέεται με την ...ανυπαρξία του ορίου. Απεναντίας, η απροσδιόριστη μορφή είναι το κριτήριο για να εφαρμόσουμε τις διάφορες μεθοδεύσεις για την άρση της απροσδιοριστίας και την, εν συνεχεία, αναζήτηση του ορίου. Ο συγκεκριμένος μαθητής δεν συνειδητοποίησε το παραπάνω γεγονός της απροσδιόριστης μορφής που παρουσιάστηκε στην πλειονότητα των ασκήσεων που ήδη έχει κάνει στην παράγραφο των ορίων. Αλλά το πλέον ακλόνητο επιχείρημα εναντίον της λανθασμένης του αντίληψης είναι: «Εάν ήταν ορθό το συμπέρασμα σου ότι «επειδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή το όριο αυτό δεν υπάρχει, τότε ... καμία συνάρτηση δεν θα ήταν παραγωγίσιμη!»
2. Ξεκινάμε με το δεδομένο ότι εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις αναζήτησης του ορίου στο x_0 (είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης) για μια συνάρτηση f οπότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Είτε ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ είτε ΝΑ ΜΗΝ ΥΠΑΡΧΕΙ το όριο. Τα ίδια βεβαίως ισχύουν και για το όριο του λόγου μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ καθώς $x \rightarrow x_0$. Όμως εδώ, δεν αρκεί να υπάρχει το όριο, για να πούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Πρέπει να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός. Αν υπάρχει και είναι άπειρο, τότε η συνάρτηση δεν παραγωγίσιμη.

Υποερώτημα (β)

Η αντιμετώπιση του υποερωτήματος διδακτικά, απαιτεί ένα σχέδιο μαθήματος με συγκεκριμένες δραστηριότητες, που θα βοηθούν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους.

Τίθενται οι παρακάτω στόχοι.

1) Να αντιληφθεί ο μαθητής ότι η συνέχεια στο x_0 , είναι μια αναγκαία συνθήκη για την παραγωγισιμότητα της f στο x_0 αλλά δεν είναι ικανή.

2) Να γνωρίζει ότι η ασυνέχεια της f στο x_0 είναι ικανή συνθήκη για να συμπεράνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

3) Να γίνει σαφές στο μαθητή ότι η ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν αποτελεί

ικανή συνθήκη για να ισχυρισθούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Μόνο αν το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πεπερασμένο τότε η f είναι παραγωγίσιμη.

Ως προς τη διδακτική προσέγγιση ισχύουν τα όσο έχουν ήδη εκτεθεί στο 1^ο ερώτημα για την μέτρηση κύκλου.

Προαπαιτούμενες Γνώσεις

1. Ο ορισμός της συνέχειας μιας f στο x_0 .
2. Στα γωνιακά σημεία της γραφικής παράστασης μια συνεχούς συνάρτησης, αν υπάρχουν, δεν ορίζεται εφαπτόμενη και επομένως σ' ένα γωνιακό σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη.
3. Εξέταση της παραγωγισιμότητας σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου και στα σημεία που έχουμε αλλαγή κλάδου
4. Η μέθοδος απόδειξης δια του αντιπαραδείγματος και οι αναγκαίες διευκρινήσεις που πρέπει να επαναληφθούν, ώστε να αρθούν οι επιφυλάξεις στους μαθητές ως προς την εγκυρότητα της μεθόδου.

Ανάλυση Δυσκολιών – Πιθανές Λανθασμένες Αντιλήψεις

- Ήδη στο υποερώτημα (α) έχουν εκτεθεί οι παρανοήσεις των μαθητών επί του συγκεκριμένου θέματος
- Όσο αφορά στη μέθοδο απόδειξης δια του αντιπαραδείγματος είναι αναγκαίο να αποσαφηνιστούν τα εξής:

Έστω ότι τίθεται το ερώτημα: « η $P(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Omega$ »;

Η εντός εισαγωγικών πρόταση είναι αληθής αν πράγματι η $P(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Omega$. Αν υποτεθεί ότι υπάρχει μία τουλάχιστον τιμή x_0 του x για την οποία η $P(x)$ δεν ισχύει, τότε η εντός εισαγωγικών πρόταση είναι ψευδής.

Ένα απλό παράδειγμα: «η πρόταση $x^2 - 4x + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ » είναι αληθής; Για $x=2$ έχουμε $4 - 8 + 3 > 0$ άτοπο. Άρα, η δοθείσα πρόταση είναι ψευδής. Το $P(2)$ λέγεται «ένα αντιπαράδειγμα για την δοθείσα»

- Δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εξέταση της παραγωγισιμότητας σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου και στα σημεία που έχουμε αλλαγή κλάδου. Δεν συνειδητοποιούν ότι αφού η f είναι πολλαπλού τύπου και η συνάρτηση του λόγου μεταβολής είναι πολλαπλού τύπου .

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$$

$$x \neq x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} & x < x_0 \\ \frac{f_2(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} & x > x_0 \end{cases}$$

Δραστηριότητα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

1. Να γραφεί χωρίς χρήση του συμβόλου της απόλυτης τιμής
2. Να κάνετε την γραφική της παράσταση
3. Να την μελετήσετε ως προς τη συνέχεια και ειδικά στο σημείο $x_0 = 0$
4. Να την μελετήσετε ως προς την παραγωγισιμότητα στο σημείο $x_0 = 0$
5. Ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $0 (0, f(0))$;

Σχόλιο:

Με τη δραστηριότητα 1 ο μαθητής διαπιστώνει ότι υπάρχουν συναρτήσεις που ενώ είναι συνεχείς σ' ένα σημείο, εδώ στο $x_0 = 0$, εν τούτοις δεν είναι παραγωγίσιμες. Δεν ισχύει λοιπόν το αντίστροφο της πρότασης: «Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε f συνεχής στο x_0 ».

Διαπιστώνει επίσης ότι σε γωνιακό σημείο δεν ορίζεται εφαπτόμενη.

Δραστηριότητα 2

Να αποδείξετε ότι: Αν f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Εφαρμογή: Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 5, & x \leq 1 \\ 3x + 7, & x > 1 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Σχόλιο:

Με τη δραστηριότητα 2 και με χρήση της πρότασης που εκτέθηκε, μπορεί ο μαθητής να αποφαίνεται αμέσως ότι: «αν η f δεν είναι συνεχής δεν είναι παραγωγίσιμη».

Δραστηριότητα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , x < 0 \\ \sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Σχόλιο:

Με τη λύση της δραστηριότητας 3 αυτής διαπιστώνει ο μαθητής ότι υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ αλλά δεν είναι πεπερασμένο. Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ Γ. ΚΑΡΦΗ