ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (από τον κ. Σωτήρη Λουρίδα)
ΠΕ 03 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ερώτημα 1ο

α) Θεωρία

β) Παρατηρούμε ότι η Α'Α είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}'$ επομένως και της $\hat{A}$. Όμοια η Β'Β είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}'$ και $\hat{B}$ και η Γ'Γ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{\Gamma}'$ και $\hat{\Gamma}$. Άρα τα τρίγωνα έχουν το ίδιο έκκεντρο. Έστω ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ και ρ' η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο Α'Β'Γ'. Παρατηρούμε ότι:

$$\rho'-\rho = \delta \;\Rightarrow\; \frac{2E'}{\Pi'} - \frac{2E}{\Pi} = \delta \quad \Leftrightarrow 2\,\frac{E'}{\Pi'} = \frac{2E+\delta\cdot\Pi}{\Pi} \quad (1)$$

Ταυτόχρονα έχουμε

$$\frac{E'}{E} = \frac{\Pi'^2}{\Pi^2} \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε:

$$\Pi' = \frac{2E+\delta\cdot\Pi}{2E}\Pi$$

και $E' = \dfrac{(2E+\delta\cdot\Pi)^2}{4E}$

γ) (i) $f'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = 0$

άρα υπάρχει σταθερά $c\in\Re$ ώστε $f(x) = c\,e^x$

(ii) $2x\,h(x) = (x^2+1)\,h(x) - (x^2+1)\,h'(x) + 1 \;\Leftrightarrow$
$2x\,h(x) + (x^2+1)\,h'(x) = (x^2+1)\,h(x) + 1 \qquad (1)$

Θεωρούμε $g(x) = (x^2+1)\,h(x) + 1 \;\Rightarrow$
$g'(x) = 2x\,h(x) + (x^2+1)\,h'(x)$

Από την (1) παίρνουμε :

$g'(x) = g(x) \;\Rightarrow\; g(x) = c\,e^x$ όπου c σταθερά.

Άρα $(x^2+1)\,h(x) + 1 = c\,e^x$

Αν $x=0$ τότε $c=1$

Τελικά παίρνουμε:

$(x^2+1)\ h(x) + 1 \ = \ e^x \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \ = \ \dfrac{e^x - 1}{x^2+1}$

Ερώτημα 2^o

α) Θεωρία (θεώρημα Fermat)

β) **(i)** $\hat{\beta} = 1{,}115 \qquad \bar{x} = 47{,}5 \qquad \bar{y} = 136 \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 83{,}03$

άρα $\hat{y} = 83{,}03 + 1{,}115\ x$

(ii) $\hat{y} = 83{,}03 + 1{,}115 * 80 = 172{,}123$ mm Hg

γ) $\begin{bmatrix} 2 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ οπότε:

$(2-\lambda)\ x + ky = 0$

$-kx + (1-\lambda)\ y = 0$

Αφού το διάνυσμα είναι μη μηδενικό έχουμε:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & k \\ -k & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 + \kappa^2 = 0$

Το τριώνυμο θα πρέπει να έχει διακρίνουσα θετική ή 0, οπότε παίρνουμε:

$\Delta = 1 - 4\kappa^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \leq \dfrac{1}{2}$ με κ ακέραιο. Άρα κ=0.

<u>Απαντήσεις</u>

ΠΕ 03 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1. γ
2. β
3. γ
4. α
5. δ
6. γ
7. β
8. γ
9. β
10. γ
11. α
12. β