

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2005
ΚΛΑΔΟΣ ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
«Γνωστικό Αντικείμενο»
ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Να απαντήσετε στα επόμενα τέσσερα (4) ισοδύναμα ερωτήματα

ΕΡΩΤΗΜΑ 1^ο :

α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$

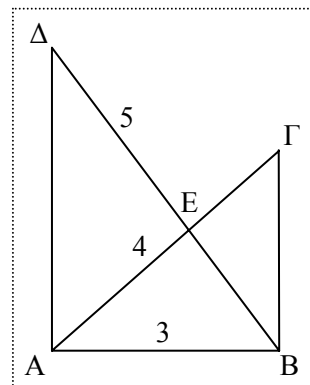
β) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 3^{-10}$. Να δείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (2 - \alpha, 2 + \alpha)$ η $f(x)$ είναι θετική.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του $m \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ να έχει 4 πραγματικές ρίζες οι οποίες να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2^ο

α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (παραγοντική ολοκλήρωση) στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β) Στο διπλανό σχήμα οι ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετες στην ΑΒ και $AB = 3$, $ΑΓ = 4$, $ΒΔ = 5$. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ε από την ευθεία ΑΒ.



γ) Αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1α .

Αν m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ οπότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx \quad \text{ή} \quad m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha) \quad , \quad \alpha < \beta$$

$$\text{ή} \quad m \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M \quad (1) .$$

$$\text{Αν } m = M \text{ τότε } \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(x_{\epsilon}) = f(x_{\mu}) \text{ , (όπου } f(x_{\epsilon}) = m, f(x_{\mu}) = M \text{)}$$

οπότε $\xi = x_{\epsilon}$ ή $\xi = x_{\mu}$

Αν $m \neq M$ τότε επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ από την (1) και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad \text{ή} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha).$$

Σχόλια – Παρατηρήσεις

Μία δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού αναφέρεται στο βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β. που διδάσκεται τώρα στα σχολεία.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, (§ 3.6 σελίδα 340), με τη διαφορά ότι $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Η απόδειξη που αναφέρουμε είναι σύμφωνα με αυτή που υπάρχει στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΝΑΛΥΣΗ, σελίδα 242, (Κατσαργύρης Βασίλειος, Μεντής Κωνσταντίνος, Παντελίδης Γεώργιος, Σουρλάς Κωνσταντίνος).

Παρατήρηση:

Κατά την απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού, αναφέρεται ότι σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ στην απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, (§ 3.4 σελίδα 88), αναφέρεται ότι $\xi \in (\alpha, \beta)$.

(Ελπίζουμε να δοθούν στους διορθωτές οδηγίες για επιείκεια στο σημείο αυτό).

1β.

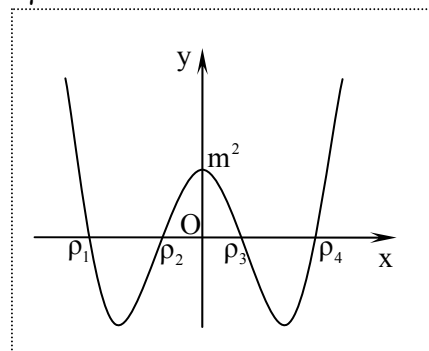
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο έχουμε:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\alpha > 0$, που εξαρτάται από το ε τέτοιο ώστε για κάθε x με $|x - 2| < \alpha \Leftrightarrow x \in (2 - \alpha, 2 + \alpha)$, να ισχύει $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - 3^{-10} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{-10} - \varepsilon < f(x) < 3^{-10} + \varepsilon$$

Θέλουμε να είναι $f(x) > 3^{-10} - \varepsilon \geq 0$ οπότε αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα το ε ώστε να είναι $\varepsilon \leq 3^{-10}$.

1γ.



Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - (3m+2)x^2 + m^2, \quad x, m \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f είναι άρτια και εξίσωση η $f(x) = 0$ έχει 4 πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 2t$, $t > 0$

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θετούμε :

$$\rho_1 = -3t, \quad \rho_2 = -t, \quad \rho_3 = t, \quad \rho_4 = 3t$$

$$\begin{cases} f(\rho_3) = 0 \\ f(\rho_4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 - (3m+2)t^2 + m^2 = 0, (1) \\ 81t^4 - (3m+2)9t^2 + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -81t^4 + 81(3m+2)t^2 - 81m^2 = 0, (2) \\ 81t^4 - 9(3m+2)t^2 + m^2 = 0, (3) \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (2), (3) και βρίσκουμε ότι:

$$t^2 = \frac{10m^2}{9(3m+2)}, (4). \quad \text{Από (1) και (4) προκύπτει ότι:}$$

$$(10m)^2 = (9m+6)^2 \Leftrightarrow m = 6, \quad \text{ή} \quad m = -\frac{6}{19}$$

2 α

Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) \cdot g(x) dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κανόνα παραγώγισης

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

και ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας.

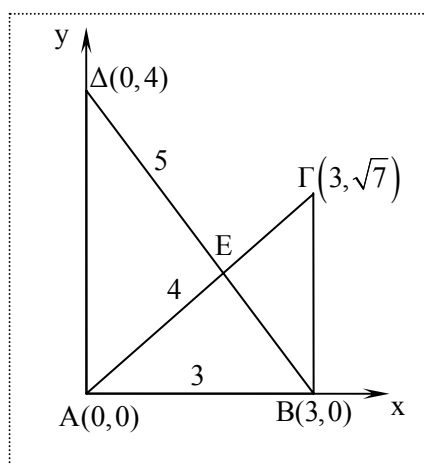
$$\int_a^\beta [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int_a^\beta [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] dx$$

$$\Rightarrow [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta = \int_a^\beta f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^\beta f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^\beta f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) \cdot g(x) dx .$$

2 β.

Προσαρμόζουμε το σχήμα σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι $B\Gamma = \sqrt{7}$ και $A\Delta = 4$ οπότε:

$$A(0,0), B(3,0), \Gamma(3, \sqrt{7}), \Delta(0,4) .$$

Οι εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι

$$A\Gamma : y = \frac{\sqrt{7}}{3}x \quad \text{και} \quad B\Delta : y = -\frac{4}{3}x + 4$$

Η λύση του συστήματος των δύο ευθειών είναι

$$(x, y) = \left(\frac{4(4 - \sqrt{7})}{3}, \frac{16\sqrt{7} - 28}{9} \right) \text{ και εκφράζει τις}$$

συντεταγμένες του σημείου E .

$$\text{Άρα } d(E, AB) = |y| = \frac{16\sqrt{7} - 28}{9}$$

2 γ

(Βλέπε ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Ο.Ε.Δ.Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ σελίδα 57).

ΕΡΩΤΗΜΑ 3^ο

1. Σωστή απάντηση : δ
2. Σωστή απάντηση : (Κάθε απάντηση θεωρήθηκε σωστή)
3. Σωστή απάντηση : β
4. Σωστή απάντηση : δ
5. Σωστή απάντηση : α
6. Το ερώτημα αποσύρθηκε κατά τη βαθμολόγηση

ΕΡΩΤΗΜΑ 4^ο

7. Σωστή απάντηση : β
8. Σωστή απάντηση : δ
9. Σωστή απάντηση : δ
10. Σωστή απάντηση : β
11. Σωστή απάντηση : γ
12. Σωστή απάντηση : β